где $\lambda = 0, 1, \ldots, \delta - 1$, *числа* $\gamma_k(\lambda)$ *и* ${}_\lambda\chi_{k\tau_k}$ *определяются в зависимости от того, какому классу вычетов по модулю числа* δ *принадлежит число* $\sum_{k=1}^{s_i} j_k$ *в* (4).

Идея доказательства состоит в том, что если подставить все рациональные функции (2) в уравнение (1), то после элементарных преобразований, получим систему тождеств

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \sum_{j_1=0}^{\nu_{1i}} \sum_{j_2=0}^{\nu_{2i}} \cdots \sum_{j_{s_i}=0}^{\nu_{s_i i}} \varepsilon_t^{\sum_{k=1}^{s_i} j_k} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{ki}}{j_k} \left\{ \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{(l_{ki})} \right\}^{\nu_{ki} - j_k} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)} \right)^{(l_{ki})} \right\}^{j_k} \equiv 0, \quad (4)$$

где $j = 1, 2, \ldots, \delta$. На основании того, какому классу вычетов по модулю числа δ принадлежит число $\sum_{k=1}^{s_i} j_k$, в итоге преобразований и приходим к системе (3).

Достаточность утверждения теоремы следует из того факта, что если сложить все тождества системы (3) и выполнить группировку членов, то получим тождества (4). Это и означает, что все рациональные функции семейства (2) будут решениями алгебраического дифференциального уравнения (1).

С помощью сформулированной теоремы указываются классы дифференциальных уравнений (1) которые имеют максимальное количество рациональных решений заданной структуры. Например структуры вида (2), когда $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$, $\mathfrak{P}(z) \equiv 1$, и т. д.

Литература

1. Rainville E. D. *Necessery conditions for polynomial solutions of certain Riccati equations* // Amer. Math Monthly. 1936. Vol. 43. P. 473–476.

2. Горбузов В. Н., Немец В. С. *Построение в целом полиномиальных решений с заданным показателем степени* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1633–1636.

3. Лукашевич Н. А., Денисковец А. А., Немец В. С. *Алгебраические дифференциальные уравнения с максимальным числом полиномиальных решений заданной структуры* // Диффренц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2172–2174.

4. Горбузов В. Н. *Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений.* Гродно: ГрГУ, 2006. 255 с.

5. Немец В. С. *Структурный метод построения рациональных решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. 2007. Сер. 2, № 4(59). С. 57–63.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. М. Пецевич, Д.Н. Щевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

В работе, на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей, продолжаем [1] рассматривать систему двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = A_2 y^2 + A_1 y + A_0, \quad y'^2 = (b_{12} y + b_{02}) x^2 + (b_{11} y + b_{01}) x + b_{10} y + b_{00}, \quad (1)$$

где A_i, $i = \overline{0,2}$ — полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, b_{jk}, $j = \overline{0,1}$, $k = \overline{0,2}$ — аналитические по t функции, $A_2 \neq 0$, $|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0$, и правые части ее уравнений не являются одновременно полными квадратами.

В [1] было показано, что справедлива

Лемма 1. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *не имела подвижных многозначных особенностей, необходимо, чтобы степень многочленов* A_i, $i = \overline{0,2}$ *по переменной* x *была не выше* 4.

Пусть $A_2 = a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Используя метод малого параметра [2, 3], также было показано, что необходимо требовать $a_{24} = a_{23} = 0$.

В работах [1, 4] была изучена система (1) на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей для случаев $a_{22} = a_{21} = 0$, $a_{20} \neq 0$, и $a_{22} = 0$, $a_{21} \neq 0$.

Сейчас исследуется система (1) для случая

$$a_{22} \neq 0. \tag{2}$$

Лемма 2. *Для того, чтобы система* (1) *при дополнительных условиях* (2) *обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к одному из видов:*

$$x'^2 = (y + a_{13}x + a_{12})^2(x^2 + a_{21}x + a_{20}), \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00},$$

или

$$x'^2 = (xy + a_{13}x^2 + a_{21}y + a_{12}x + a_{11})^2, \quad y'^2 = (b_{12}y + b_{02})x^2 + (b_{11}y + b_{01})x + b_{10}y + b_{00}.$$

Литература

1. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. *Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной* // Весн. Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. 2015. № 1(186). С. 35–40.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939. 719 с.

3. Cosgrove C., Scoufis G. *Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree* // Stud. Appl. Math. 1993. V. 88. P. 25–87.

4. Пецевич В. М., Шевченя Д. Н. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у одной системы дифференциальных уравнений специального вида* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. научн. семинара. 14–19 сентября 2015 г. Минск, Беларусь: Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 67.

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

А.Ф. Проневич, П.Б. Павлючик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
{pranevich, p.pavlyuchik}@grsu.by

Рассмотрена линейная неавтономная система уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{j=1}^{m} (U_j(z)\, w + g_j(z))\, dz_j, \tag{1}$$

где точки w и z из пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, вектор $dw = \operatorname{colon}(dw_1, \ldots, dw_n)$, а элементы квадратных матриц $U_j \colon z \to U_j(z)$ $\forall z \in G$ порядка n и векторных функций $g_j \colon G \to \mathbb{C}^n$, $j = \overline{1, m}$, голоморфны на односвязной области $G \subset \mathbb{C}^m$.

В работе дано решение [1] задачи Дарбу о построении первых интегралов [2, 3] для трех классов линейных систем уравнений в полных дифференциалах вида (1): треугольных, диагонализуемых и систем Лаппо — Данилевского. Задача решена при условии, что дифференциальная система (1) является вполне разрешимой на области $G \times \mathbb{C}^n$, т. е. для системы (1) выполняются условия Фробениуса [4, с. 41; 5, с. 43–44].